

УДК 311.2:519.86]:330.131.7

Павлюк Є. Д.

кандидат економічних наук,
керівник напряму моделювання,
ПАТ АБ «Південний», Одеса, Україна;
e-mail: eugene_dp @ukr.net; ORCID ID: 0000-0001-8173-5612

Павлюк О. О.

доктор економічних наук, доцент,
ДВНЗ «Київський національний університет імені Вадима Гетьмана», Україна;
e-mail: elena_pavluk @ukr.net; ORCID ID: 0000-0003-1023-7071

ЗАСТОСУВАННЯ СТАТИСТИЧНИХ ПРИЙОМІВ У ПРАКТИЦІ ПОБУДОВИ ШКАЛИ ЙМОВІРНОСТІ ДЕФОЛТУ

Анотація. Обґрунтовано основні характерні властивості кривої PD (Probability of default), що сформувалися у практиці моделювання. Доведено, що основними характеристиками кривої PD є те, що вона ґрунтується на даних про фактичну відносну частоту дефолтів у кожному з ризик-класів за обраний період часу і має форму, що апроксимує або збігається з експоненційною функцією. Показано, що важливим аспектом, який впливає на калібрування, є кількість рейтингових класів і способи їх побудови. Визначено, що нахил кривої демонструє класифікаційну ефективність моделі. Для моделей із високими дискримінаційними властивостями характерна форма кривої, що має повільне зростання в рейтингових класах верхньої частини шкали і значне пришвидшення зростання в останніх класах ризику. Проаналізовано два основних підходи до визначення кількості класів ризику: підхід на основі процентилів і підхід на основі рівних діапазонів балів. Показано, що при формуванні класів варто враховувати загальний обсяг вибіркового спостереження, пропорцію «хороших» і «поганих» та обирати кількість класів таким чином, щоб воно було не надто велике і не надто мале. Доведено, що на практиці калібрування впливають дані, мета та обмеження дослідження. На практичних прикладах розглянуто застосування методу найменших квадратів і методу екстраполяції. Метод найменших квадратів, і зокрема похідний метод екстраполяції, дозволяють будувати калібраційну криву на основі даних про відносну частоту дефолтів. Визначено, що математичний апарат сімейства нелінійних кривих дозволяє моделювати процес експоненційного зростання з різним рівнем інтенсивності. Експоненційна крива і споріднені з нею функції можуть бути корисними при моделюванні більш консервативних оцінок PD або для моделей з високими дискримінаційними властивостями, у той час як функція Вейбулла, S-крива і степенева функція можуть краще пристосовуватися до процесів помірнього зростання. Застосування практичних прийомів побудови шкали PD є важливим для багатьох вітчизняних банківських спеціалістів, хто займається внутрішніми моделями кредитного ризику.

Ключові слова: калібрування, дефолт, імовірність, криві, калібрація кривої ймовірності дефолту, метод найменших квадратів, метод екстраполяції.

Формул: 21; рис.: 1; табл.: 7; бібл.: 10.

Pavliuk Y.

Ph. D. in Economics,
Head of Risk Modeling,
Pivdenny Bank Joint Stock Company, Odesa, Ukraine;
e-mail: eugene_dp@ukr.net; ORCID ID: 0000-0001-8173-5612

Pavliuk O.

Doctor of Economics, Associate Professor,
Kyiv National Economics University named after Vadym Hetman, Ukraine;
e-mail: elena_pavluk@ukr.net; ORCID ID: 0000-0003-1023-7071

APPLICATION OF STATISTICAL TECHNIQUES IN THE PRACTICE OF BUILDING A DEFILIENCE SCALE

Abstract. The main substantial features of the PD curve (default probability) formed in practical modeling are substantiated in the articles. It is proved that the main characteristics of the PD curve are that it is based on data on the actually restored default rate in each of the risk classes over a period of time and has a shape that approximate for coincides with the exposure function. It is shown that the best aspect that affects the calibration is the number of rating classes and ways to build them. It is determined that the slope of the curve demonstrates the classification model of efficiency. It is determined that the slope of the curve demonstrates the classification efficiency of the model. Models with high discriminant properties are characterized by a curve shape that has a slow increase in the rating classes of the upper part of the scale and a significant acceleration of growth in the last risk classes. Two main approaches to determining the number of risk classes are analyzed: the percentile-based approach and the equal score range approach. It is shown that when forming classes, it is necessary to take into account the total amount of sample observations, the proportion of «good» and «bad», and choose the number of classes so that it is not too large and not too small. Calibration practice have been shown to be influenced by data, purpose, and study limitations. The application of the least squares method and the extrapolation method is considered on practical examples. The least squares method and in particular the derived extrapolation method allow to build a calibration curve on the basis of data on the relative frequency of defaults. It is determined that the mathematical apparatus of the family of nonlinear curves allows to model the process of exponential growth with different levels of intensity. The exponential curve and related functions may be useful in modeling more conservative PD estimates or for models with highly discriminatory properties, while the Weibull function, S-curve, and power function may be better adapted to moderate growth processes. The application of practical methods of constructing the PD scale is important for many domestic banking professionals who deal with internal models of credit risk.

Keywords: Calibration, Default, Probability, Curves, Probability of default curve calibration, Least squares method, Extrapolation method.

JEL Classification C44

Formulas: 21; fig.: 1; tabl.: 7; bibl.: 10.

Вступ. Розроблення шкали ймовірностей дефолту (далі — шкали PD) є завершальним етапом побудови будь-якої скорингової / рейтингової моделі, якщо остання має використовуватися не тільки для ухвалення рішення про надання кредиту, а й для ціноутворення, формування резервів, моніторингу ризику портфеля. Під розробленням шкали ймовірностей дефолту слід розуміти визначення і присвоєння ймовірностей дефолту окремим класам / категоріям рейтингової моделі, що зазвичай називається калібруванням. Графічно, при з'єднанні значень ймовірностей дефолту лінією, утворюється крива PD, що також може мати назву «калібраційна крива». Якість калібрування залежить від того, наскільки оцінки PD, передбачені рейтинговою моделлю, відповідають фактично реалізованим коефіцієнтам дефолту. Тому перевірку якості калібрування рейтингової моделі часто називають зворотним тестуванням, а обрання підходу до калібрування може бути вирішальним для подальшого управління кредитним ризиком за допомогою моделі. Як показує досвід авторів під час роботи в консалтинговій компанії ЕУ, розвиток техніки моделювання в українських банках залишається доволі помірним. Тому застосування практичних прийомів побудови шкали PD є важливим для багатьох вітчизняних банківських спеціалістів, які займаються внутрішніми моделями кредитного ризику.

Аналіз досліджень і постановка завдання. Сучасні проблем, пов'язані з оцінкою і дотриманням вимог кредитних ризиків банків, досліджують такі вчені, як: Д. Цікларі [1], М. Корнет [2], Е. Кане [3; 4]. Автори книги «Foundations of banking risk: an overview of banking, banking risks, and risk-based banking regulation» Р. Апостолик та інші пов'язують кредитні ризики збезпечною та надійністю фінансової системи країни [5]. Практики побудови

шкали PD представлені у працях іноземних дослідників. Д. Таше досліджує метод квазімоментного узгодження [6], К. Плуту обґрунтовує методологію найбільш розсудливого оцінювання [7], а Ван Дер Бурґт — метод на основі згладженого кумулятивного профілю точності [8]. С. Боніні та Дж. Каівано досліджують калібрацію на основі Байєсівських методів [9]. Відповідно до цих досліджень, метод квазімоментного узгодження дозволяє будувати оновлені оцінки PD у рейтингових класах на основі попередніх оцінок, але враховуючи цільовий рівень коефіцієнта точності (assurasy ratio) рейтингової моделі та заданий рівень дефолтності всього портфеля, а також проводити рейтингування / обчислення балів для клієнтів обраного портфеля з використанням розробленої моделі й отримання розподілу «хороших» і «поганих» за класами ризику моделі. Методологія «найбільш розсудливого» оцінювання дозволяє провести оцінку PD за відсутності фактичних спостережень дефолтів і припущенні щодо їхньої незалежності; незначної кількості спостережень «поганих» і «хороших» та припущенні щодо їхньої незалежності; незначної кількості спостережень «поганих» і «хороших» та припущення щодо рівня кореляції між дефолтами. Таким чином, обрання методу калібрування залежить від попередніх даних, припущень і цілей калібрації.

Метою статті є дослідження напрямів отримання оцінок шкали PD і продемонструвати практики побудови шкали PD.

Результати дослідження. Перед початком огляду прийомів слід нагадати характерні риси і властивості кривої PD, що сформувалися у практиці моделювання і приймаються до уваги при калібруванні відповідно до вимог Базельського комітету [10]: крива PD, зазвичай, має ґрунтуватися на даних про фактичну відносну частоту дефолтів у кожному з ризик-класів за обраний період часу; має спостерігатися монотонне зростання значень PD, рухаючись від найкращого до найгіршого класу ризику попри можливу варіабельність фактичних значень фактичної відносної частоти дефолтів; типова крива PD має форму, що апроксимує або збігається з експоненційною функцією; нахил кривої демонструє класифікаційну ефективність моделі. Для моделей з високими дискримінаційними властивостями характерна форма кривої, що має повільне зростання в рейтингових класах верхньої частини шкали і значне пришвидшення зростання в останніх класах ризику. Також важливим аспектом, що може впливати на калібрування, є кількість рейтингових класів / категорій та способи їх побудови. Так, у практиці моделювання виділяють два основні підходи визначення кількості класів ризику: підхід на основі перцентилів і підхід на основі «рівних діапазонів» балів.

Перший спосіб полягає в тому, що вибіркова сукупність спостережень (кількість клієнтів, що отримує бали, або рейтинг при використанні моделі) поділяється на n -перцентилів. Наприклад, якщо використовується 10 перцентилів, має утворитися 10 рейтингових класів, якщо п'ять перцентилів — то 20 рейтингових класів і т. д. Таким чином, кількість спостережень у кожному з класів буде однаковою, що може усунути проблему концентрації, підвищує репрезентативність кожного класу і забезпечує впорядковану пропорційність розподілу дефолтних клієнтів уздовж шкали.

Другий спосіб полягає в розбитті загальної шкали балів моделі (макс бал — мін бал) на n рівних діапазонів. Так, наприклад, за максимальної кількості балів 100 і мінімальної кількості 0 та бажанні мати 10 рейтингових класів утвориться 10 діапазонів по 10 балів кожний і відповідно фактична кількість клієнтів розподілиться по утворених діапазонах. Цей спосіб, попри зовнішню привабливість, може призводити до появи нерепрезентативних класів, у яких кількість спостережень може бути мінімальною чи нульовою. При калібрації шкали PD це може певним чином ускладнювати об'єктивне визначення значення ймовірності дефолту в класах з відсутніми спостереженнями. Тому при формуванні класів варто враховувати загальний обсяг вибіркового спостережень, пропорцію «хороших» і «поганих» та обирати кількість класів таким чином, щоб воно було не надто велике і не надто мале.

У практиці калібрування склалося декілька напрямів отримання оцінок шкали PD. Їх умовно відрізняє те, на основі яких даних доводиться будувати оцінки PD, які цілі мають урахуватися та обмеження накладатися на отримання кінцевого результату. Якщо рейтингова / скорингова модель побудована на основі логістичної або пробіт регресії, то цілком природним наслідком є отримання оцінок імовірностей у відповідних рейтингових або скорингових класах з оригінальних регресійних моделей. У разі коли модель є експертною, гібридною або статистичною технікою, але відмінною від вказаних вище, де автоматично генерується оцінка ймовірності, може застосовуватися метод найменших квадратів або метод екстраполяції за даними реалізованих значень дефолтності для побудови кривої PD. У разі наявності оцінок PD у рейтингових класах у визначений момент часу і розуміння об'єктивного напрямку тренду загального рівня дефолтності всього портфеля можливе коригування відповідних оцінок на величину «центральної тенденції» за допомогою підходу на основі теореми Байеса [3]. Далі розглянемо на практичних прикладах особливості застосування методу найменших квадратів і методу екстраполяції. Потреба використання саме цього підходу характерна для випадків, коли оцінки PD відсутні (як результат побудови нової моделі, окрім дихотомічних регресії), або за результатами валідації (зворотного тестування) їхня точність є не задовільна, проте на цьому етапі немає намірів узгоджувати оцінки PD із центральною тенденцією, фіксувати коефіцієнт точності та дефолтність портфеля, застосовуючи складнішу методологію. У такому разі запускається процес калібрування, який у спрощеному варіанті поділяється на чотири основні етапи: проведення рейтингування / обчислення балів для клієнтів обраного портфеля з використанням розробленої моделі і отримання розподілу «хороших» і «поганих» за класами ризику моделі; обчислення значень фактичної відносної частоти дефолтів у кожному з ризик-класів на основі даних розподілу п.1; діагностика монотонності зміни фактичної відносної частоти дефолтів уздовж рейтингової шкали; виведення функції калібрування для інтегрованого опису кривої PD.

Розглянемо ситуацію після виконання двох етапів, коли модель застосована до відповідного портфеля, утворений розподіл «хороших» і «поганих» за класами ризику моделі та обчислена фактична відносна частота дефолтів у кожному з ризик-класів, що представлено в *табл. 1*.

Таблиця 1

Розподіл за класами ризику

Рейтинговий клас	Усі клієнти	«Погані»	Фактична частота дефолтності, %	PD, %
1	0	0	0	?
2	0	0	0	?
3	0	0	0	?
4	38	0	0	?
5	189	0	0	?
6	216	2	0,9	?
7	119	3	2,5	?
8	70	5	7,1	?
9	34	4	11,8	?
10	18	5	27,8	?
Разом	-	-	-	?

Примітка. Складено авторами.

Візуальний аналіз фактичної відносної частоти дефолтів після застосування моделі дозволяє впевнитися у тому, що модель придатна для подальшого використання, зважаючи на такі ознаки:

- «погані» розташувалися в нижчій половині рейтингової шкали;
- спостерігається монотонне зростання фактичної відносної частоти дефолтів з рухом від «менш ризикових» до «більш ризикових» класів;

- спостерігається прискорення зростання RDR з кожним класом ризику, що вказує на достатньо високу дискримінаційну потужність моделі та передумови побудови кривої PD з допомогою однієї з відомих нелінійних функцій.

Це дозволяє перейти до фінального етапу процесу калібрування. Слід нагадати, що крива обраної калібраційної функції має пройти крізь або максимально наближено до точок фактичної відносної частоти дефолтів. Це забезпечить найбільш об'єктивну серед можливих варіантів оцінку PD і дозволить екстраполювати оцінки на рейтингові класи 1—5 наведеного прикладу, де не спостерігалось дефолтів. Зауважимо, що ми все ж схильні вважати, що ймовірність дефолту в цих класах є більшою за 0, хоча і меншою за ймовірність у класі 6, попри відсутність фактичних свідочств. Серед функцій — претендентів для використання на етапі 4 розглянемо функції, які наведено в *табл. 2*. Зазначені функції є різними за математичною формалізацією і сферою використання, але їх об'єднують такі важливі властивості:

- можуть описувати процеси нелінійного зростання / падіння;
- трансформуються до лінійної форми, що суттєво спрощує оцінку їхніх параметрів;
- мають локальний чи глобальний діапазон визначення від 0 до 1, що, на відміну від декількох інших функцій, дозволяє моделювати значення ймовірності.

За наявності значень фактичної відносної частоти дефолтів у декількох класах ризику найбільш прийнятним методом оцінювання параметрів є метод найменших квадратів, що мінімізує відхилення значень калібраційної функції від значень фактичних спостережень.

Нагадаємо, що параметри b_0 та b_1 однофакторної лінійної функції можна легко отримати, скориставшись формулами:

$$b_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}, \quad (1)$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 x_i. \quad (2)$$

У *табл. 2* наведені оригінальні формули відповідних функцій та їхня трансформація до лінійної форми.

Таблиця 2

Оригінальні формули функцій

Функція	Формула функції	Лінійне перетворення
Експоненційна	$y_i = b_0 * e^{b_1 x_i}$	$\ln(y_i) = \ln(b_0) + b_1 x_i$
Log — log	$y_i = \exp(b_0 + b_1 \ln(x_i))$	$\ln(y_i) = b_0 + b_1 \ln(x_i)$
Log — lin	$y_i = \exp(b_0 + b_1 x_i)$	$\ln(y_i) = b_0 + b_1 x_i$
Степенева	$y_i = b_0 * X_i^{b_1}$	$\ln(y_i) = b_0 + \ln(x_i) b_1$
Логістична	$y_i = \frac{1}{1 + e^{-(b_0 + b_1 x_i)}}$	$\ln \left[\frac{y_i}{1 - y_i} \right] = b_0 + b_1 x_i$
S— крива (log reciprocal model)	$y_i = e^{(b_0 + \frac{b_1}{x_i})}$	$\ln(y_i) = b_0 + \frac{b_1}{x_i}$
Кумулятивна	$y_i = b_0 * b_1^{x_i}$	$\ln(y_i) = \ln(b_0) + \ln(b_1) x_i$
Зростання	$y_i = e^{b_0 + b_1 x_i}$	$\ln(y_i) = b_0 + b_1 x_i$
Вейбулла	$y_i = 1 - e^{-\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^k}$	$\ln(-\ln(1 - y_i)) = k * \ln(x_i) - k * \ln(\lambda)$ Зробивши заміну так, що $\ln(-\ln(1 - y_i)) = y_i$ $\ln(x_i) = x_i$ $k = b_1$ $k * \ln(\lambda) = b_0$ Отримуємо $y_i = b_0 + b_1 x_i$

Примітка. Складено авторами.

Зробимо важливий наголос на тому, що кумулятивна крива зростання є різними математичними формалізаціями одного і того самого процесу, який добре відомий у фінансах як нарахування «складного процента» і який можливо моделювати, визначивши середній темп росту на проміжку n за формулою середньої геометричної:

$$r = \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1. \quad (3)$$

Тому, попри різні формули знаходження праматерів цих кривих, застосування або першої або другої функції очікувано мають привести до еквівалентних результатів і до дуже близьких результатів спорідненої до них експоненційної функції.

У практиці побудови шкали ймовірності дефолту можуть виникати ситуації, коли доцільно здійснювати оцінку всіх точок кривої на основі лише двох обраних рейтингових класів. Це може траплятися у таких ситуаціях:

- 1) коли є дані про фактичний рівень дефолтності тільки у двох рейтингових класах;
- 2) коли дані про фактичний рівень дефолтності є більше ніж в двох рейтингових класах, але через порушення умови монотонності або через інші причини є підстави вважати, що дефолтність у певних визначених класах є більш репрезентативною та об'єктивною основою для оцінок PD. Це метод екстраполяції функції, коли всі точки кривої можуть бути знайдені, якщо ми знаємо лише дві з них. Його оцінки збігаються з оцінками за методом найменших квадратів на основі двох спостережень, а змодельовані з допомогою відповідних функцій значення повністю збігаються з фактичними значеннями в цих точках. Для прикладу розглянемо спосіб калібрації PD за умов, якщо відомо про значення фактичної відносної частоти дефолтів лише у класі ризику 6 та 9 (або ці класи серед інших обрані за основу оцінки), який представлено в *табл. 3*.

Таблиця 3

Метод калібрації PD за умов відсутності даних

Рейтинговий клас	Усі клієнти	«Погані»	Факт. част. дефол, %	PD,%
1	0	0	0	?
2	0	0	0	?
3	0	0	0	?
4	38	0	0	?
5	189	0	0	?
6	216	2	0,925	?
7	119	0	0	?
8	70	0	0	?
9	34	4	11,76	?
10	18	0	0	?
Разом	-	-	-	-

Примітка. Розроблено авторами.

Використання цього підходу вимагає висунення припущення про форму функції, що найкращим чином може описати закономірність зміни ймовірності дефолту залежно від рейтингового класу. В ілюстративних цілях покажемо алгоритми застосування всіх описаних функцій для задачі побудови кривої.

Для експоненційної функції позначимо y_6 та y_9 як значення фактичної відносної частоти дефолтів у класах 6 і 9 відповідно. Використавши наведені позначки і низку алгебраїчних перетворень, знаходження b_1 та b_0 буде зводитися до обчислення таких формул:

$$b_1 = \frac{\ln\left[\frac{y_9}{y_6}\right]}{x_9 - x_6}, \quad (4)$$

$$b_0 = \exp[b_1 \cdot (x_9 - x_6)]. \quad (5)$$

Далі знаходження оцінок функції в інших точках відбувається з використанням формули експоненційної функції $y_i = b_0 \cdot e^{b_1 x_i}$ з *табл. 1*, куди слід підставити отримані значення параметрів b_0 та b_1 . Відмічаємо особливість експоненційної функції, де b_0 можливо

знайти без використання вищенаведеної формули, адже значенню b_0 відповідає спостереження відносної частоти дефолтів у класі 6, тобто $b_0 = 0,00925$. При цьому $X_i =$ (номер класу ризику — номер класу ризику, що відповідає початковому значенню y_i). Таким чином, оцінка ймовірності у класі 6 дорівнюватиме: $y_6 = 0,00925 \cdot e^{b_1 \cdot 0}$, а, наприклад, у класі 1: $y_1 = 0,00925 \cdot e^{b_1(-5)}$, у класі 10: $y_{10} = 0,00925 \cdot e^{b_1 \cdot 4}$.

Використовуючи введені раніше позначення, покажемо формули оцінки параметрів b_1 та b_0 решти функцій за даними 2-х точок:

Log-log функція:

$$b_1 = \frac{\ln(y_9) - \ln(y_6)}{\ln(x_9) - \ln(x_6)}, \quad (6)$$

$$b_0 = \ln(y_6) - b_1 \cdot \ln(x_6). \quad (7)$$

Log-lin функція:

$$b_1 = \frac{\ln(y_9) - \ln(y_6)}{x_9 - x_6}, \quad (8)$$

$$b_0 = \ln(y_6) - b_1 \cdot x_6. \quad (9)$$

Степенева функція:

$$b_1 = \frac{\ln(y_9) - \ln(y_6)}{\ln(x_9) - \ln(x_6)}, \quad (10)$$

$$b_0 = \exp[\ln(y_6) - b_1 \cdot \ln(x_6)]. \quad (11)$$

Логістична функція:

$$b_1 = \frac{\ln\left[\frac{y_9}{1-y_9}\right] - \ln\left[\frac{y_6}{1-y_6}\right]}{x_9 - x_6}, \quad (12)$$

$$b_0 = \ln\left[\frac{y_6}{1-y_6}\right] - b_1 x_6. \quad (13)$$

S — крива функція:

$$b_1 = [\ln(y_6) - \ln(y_9)] \cdot 18, \quad (14)$$

$$b_0 = \ln(y_6) - \frac{b_1}{x_6}. \quad (15)$$

Кумулятивна функція:

$$b_1 = \exp\left[\frac{\ln(y_9) - \ln(y_6)}{x_9 - x_6}\right], \quad (16)$$

$$b_0 = \exp\left[\ln(y_6) - \frac{\ln(y_9) - \ln(y_6)}{x_9 - x_6} \cdot x_6\right]. \quad (17)$$

Або з допомогою формули середньої геометричної: $r = \left(\frac{y_9}{y_6}\right)^{\frac{1}{x_9-x_6}}$ і далі оцінка PD, наприклад, у класі 7 буде дорівнювати: $y_7 = y_6 \cdot r$; у класі 8 — $y_8 = y_7 \cdot r$ і так далі.

Зростання:

$$b_1 = \left[\frac{\ln(y_9) - \ln(y_6)}{x_9 - x_6}\right], \quad (18)$$

$$b_0 = \ln(y_6) - b_1 \cdot x_6. \quad (19)$$

Або з допомогою формули середньої геометричної, як наведено вище.

Вейбула функція:

$$b_1 = \frac{\ln(-\ln(1 - y_9)) - \ln(-\ln(1 - y_6))}{\ln\left(\frac{x_9}{N}\right) - \ln\left(\frac{x_6}{N}\right)}, \quad (20)$$

$$b_0 = \ln(-\ln(1 - y_6)) - b_1 \ln\left(\frac{x_6}{N}\right). \quad (21)$$

Далі перетворюємо b_1 та b_0 у параметри функції Вейбула, де $\lambda = \exp\left(-\frac{b_0}{b_1}\right)$, $k = b_1$.

У табл. 4 представлено параметри b_1 та b_0 функцій, оцінених за методом найменших квадратів і методом екстраполяції.

Таблиця 4

Метод найменших квадратів і метод екстраполяції

Функція	За методом найменших квадратів		За методом екстраполяції	
	b_0	b_1	b_0	b_1
Експоненційна	0,0000706	0,8343000	0,0092593	0,8473550
Log-log	-16,418702	6,5592062	-15,915574	6,2695038
Log-lin	-9,5588118	0,8342839	-9,7662613	0,8473551
Степенева	0,0000001	6,5592000	0,0000001	6,2695039
Логістична	-10,032402	0,9074709	-9,9886805	0,8859753
S-крива	3,5791000	-50,056000	2,9440640	-45,757171
Кумулятивна	0,0000706	2,3032012	0,0000574	2,3334667
Зростання	-9,7662614	0,8473550	-9,5588000	0,8343000
Вейбулла	-1,1961000	6,8291000	-1,4026945	6,4107770

Примітка. Розроблено авторами.

Хоча пряме порівняння результатів не є коректним, тим не менш, очевидним є той факт, що оцінки доволі близькі, ураховуючи, що два спостереження для ілюстрації методу екстраполяції є такими ж, що використовувалися для побудови кривих за методом найменших квадратів. Це дозволяє зробити висновок про корисність методу екстраполяції в арсеналі методів побудови калібраційної кривої. Крім того, результати аналізу цікаві щодо порівняння нахилу кривих, що показано в табл. 5, 6 і на рис.

Таблиця 5

Оцінки PD методом найменших квадратів

Рейт., клас	1. Оцінки PD, отримані за методом найменших квадратів						
	Експон-на	Степ-ва	Логіст.	S-крива	Кумулят.	Зрост.	Вейбул.
1	0,000163	0,000000	0,000109	0,000000	0,000163	0,000163	0,000000
2	0,000374	0,000007	0,000269	0,000000	0,000374	0,000374	0,000002
3	0,000862	0,000094	0,000668	0,000002	0,000862	0,000862	0,000036
4	0,001986	0,000622	0,001655	0,000132	0,001986	0,001986	0,000314
5	0,004574	0,002690	0,004090	0,001609	0,004574	0,004574	0,001693
6	0,010534	0,008895	0,010075	0,008535	0,010536	0,010536	0,006696
7	0,024263	0,024449	0,024599	0,028106	0,024265	0,024265	0,021301
8	0,055883	0,058701	0,058821	0,068707	0,055888	0,055888	0,057334
9	0,128709	0,127106	0,134102	0,137700	0,128722	0,128722	0,133897
10	0,296443	0,253687	0,277341	0,240148	0,296473	0,296473	0,272861

Примітка. Розроблено авторами.

Таблиця 6

Оцінки PD методом екстраполяції

Рейт., клас	Оцінки PD, отримані за методом екстраполяції						
	Експонен.	Степен.	Логістич.	S-крива	Кумулятив.	Зростання	Вейбул.
1	0,00013	0,00000	0,00011	0,00000	0,00013	0,00013	0,00000
2	0,00031	0,00001	0,00027	0,00000	0,00031	0,00031	0,00001
3	0,00073	0,00012	0,00065	0,00000	0,00073	0,00073	0,00011
4	0,00170	0,00073	0,00159	0,00020	0,00170	0,00170	0,00069
5	0,00397	0,00295	0,00384	0,00201	0,00397	0,00397	0,00289
6	0,00926	0,00926	0,00926	0,00926	0,00926	0,00926	0,00926
7	0,02161	0,02434	0,02216	0,02752	0,02161	0,02161	0,02468

8	0,05042	0,05622	0,05211	0,06231	0,05042	0,05042	0,05713
9	0,11765	0,11765	0,11765	0,11765	0,11765	0,11765	0,11765
10	0,27453	0,22775	0,24436	0,19561	0,27453	0,27453	0,21803

Примітка. Розроблено авторами.

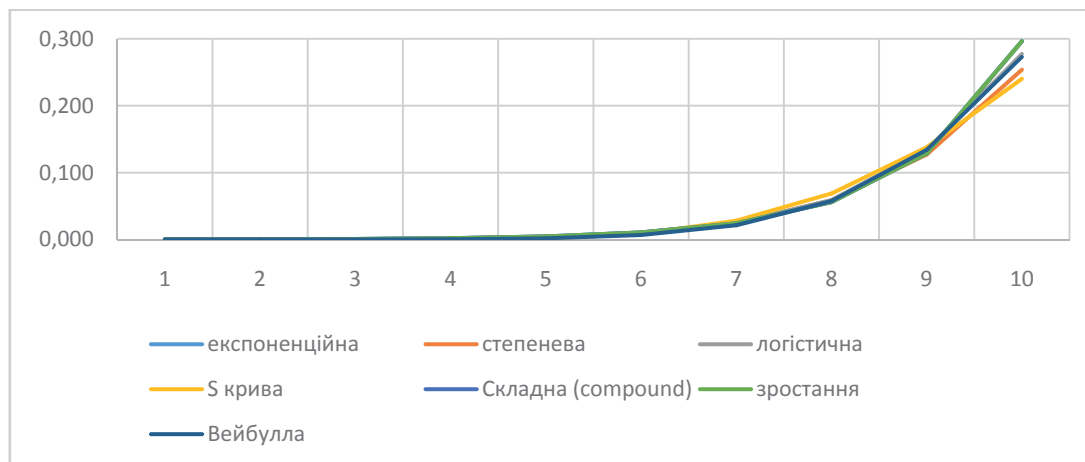


Рис. Представлення кривих PD

Примітка. Розроблено авторами.

Як показує аналіз *табл. 5 і 6 та рис.*, експоненційна крива, кумулятивна крива і функція зростання, як і очікувалося, мали найбільший темп зростання як за наявності низки спостережень, так і лише за наявності двох точок. Логістична крива і крива функції Вейбула умовно потрапили у другу групу за «крутизною» при застосуванні методу найменших квадратів. Але за умов екстраполяції за двома точками, на даних прикладу, функція Вейбула опинилася в числі більш «пласких» кривих поряд із S-кривою і степеневою функцією. Тому можемо зробити висновок, що експоненційна крива і споріднені з нею функції можуть бути корисними при моделюванні більш консервативних оцінок PD або для моделей із високими дискримінаційними властивостями, тоді як функція Вейбула, S-крива і степенева функція можуть краще пристосовуватися до процесів помірнього зростання. Розрахунки представлено в *табл. 7*.

Таблиця 7

Стандартна похибка функцій

Функція	Стандартна похибка
Логістична	0,01199
Вейбулла	0,01302
Експоненційна	0,01544
Кумулятивна / Зростання	0,01545
Степенева	0,01666
S-крива	0,02473

Примітка. Складено авторами.

Якщо брати до уваги стандартну похибку як міру «підгонки» функції під фактичні дані, то логістична крива і функція Вейбулла на даних цього прикладу продемонстрували найбільшу точність.

Висновки. Об'єктом калібрування є визначення і присвоєння значень PD для рейтингових класів моделі. Існує доволі багато підходів до вирішення задачі калібрування. Їх відрізняє те, на основі яких даних доводиться будувати оцінки PD, які цілі мають ураховуватися та обмеження накладатися на отримання кінцевого результату.

Одним із підходів, що може бути корисним у практиці калібрування, є метод найменших квадратів і зокрема похідний метод екстраполяції, що дозволяє будувати калібраційну криву на основі даних про відносну частоту дефолтів лише у двох рейтингових / скорингових класах.

Представлений математичний апарат сімейства нелінійних кривих дає змогу моделювати процес експоненційного зростання з різним рівнем інтенсивності, а наведені порівняння дають змогу зрозуміти властивості застосованих функцій та обирати ті, що відповідають попередньо визначеним критеріям форми кривої, точності підгонки і вимогам консервативності прогнозу дефолтів на обраному діапазоні кривої.

Література

1. Siclari D. Italian Banking and Financial Law. Hampshire : Palgrave Macmillan, 2015. 227 с.
2. Cornett M. M., Saunders A. Financial institutions management : a riskmanagement approach. New York : McGraw-Hill/Irwin, 2005.
3. Kane E. J., Blenman L., Black H. Banking and Capital Markets: New International Evidence. Singapore : World Scientific Publishing Co, 2010. 444 p.
4. Kane E. J. Information Technology and the Endless Re-engineering of Banking and Banking Regulation. *Financial Practice and Education*. 1994. № 4. P. 129—135.
5. Apostolik R., Donohue C., Went P. Foundations of banking risk: an overview of banking, banking risks, and risk-based banking regulation. New Jersey, 2009. 267 p.
6. Tasche D. The art of probability-of-default curve calibration. *Dirk Tasche*. 2013. URL : <https://pdf4pro.com/view/the-art-of-probability-of-default-curve-calibration-arxiv-5a66b4.html>.
7. Engelmann B., Rauhmeier R. The Basel II Risk Parameters. Estimation, Validation, Stress Testing — with Applications to Loan Risk Management. Berlin : Springer, 2006. P. 79—103.
8. Vander Burgt M. Calibrating low-default portfolios, using the cumulative accuracy profile. *Journal of Risk Model Validation*. 2007. № 4. P. 1—17.
9. Perna C., Sibillo M. Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance. London : Springer, 2014. P. 41—44.
10. International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. A Revised Framework, Comprehensive Version / Basel Committee on Banking Supervision. 2006. June 30. 347 p.

Статтю рекомендовано до друку 19.07.2021

© Павлюк Є. Д., Павлюк О. О.

References

1. Siclari, D. (2015). Italian Banking and Financial Law. Hampshire: Palgrave Macmillan.
2. Cornett, M. M., & Saunders, A. (2005). Financial institutions management: a risk management approach. New York : McGraw-Hill/Irwin.
3. Kane, E. J., Blenman, L., & Black, H. (2010). *Banking and Capital Markets: New International Evidence*. Singapore: World Scientific Publishing Co.
4. Kane, E. J. (1994). Information Technology and the Endless Re-engineering of Banking and Banking Regulation. *Financial Practice and Education*, 4, 129—135.
5. Apostolik, R., Donohue, C., & Went, P. (2009). Foundations of banking risk: an overview of banking, banking risks, and risk-based banking regulation. New Jersey.
6. Tasche, D. (2013). The art of probability-of-default curve calibration. *Dirk Tasche*. Retrieved from <https://pdf4pro.com/view/the-art-of-probability-of-default-curve-calibration-arxiv-5a66b4.html>.
7. Engelmann, B., & Rauhmeier, R. (2006). The Basel II Risk Parameters. Estimation, Validation, Stress Testing — with Applications to Loan Risk Management. Berlin: Springer. 79—103.
8. Vander Burgt, M. J. (2007). Calibrating low-default portfolios, using the cumulative accuracy profile. *Journal of Risk Model Validation*, 4, 1—17.
9. Perna, C., & Sibillo, M. (2014). Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance. London: Springer, 41—44.
10. Basel Committee on Banking Supervision. (2006, June). International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. A Revised Framework, Comprehensive Version.

The article is recommended for printing 19.07.2021

© Pavliuk Y., Pavliuk O.